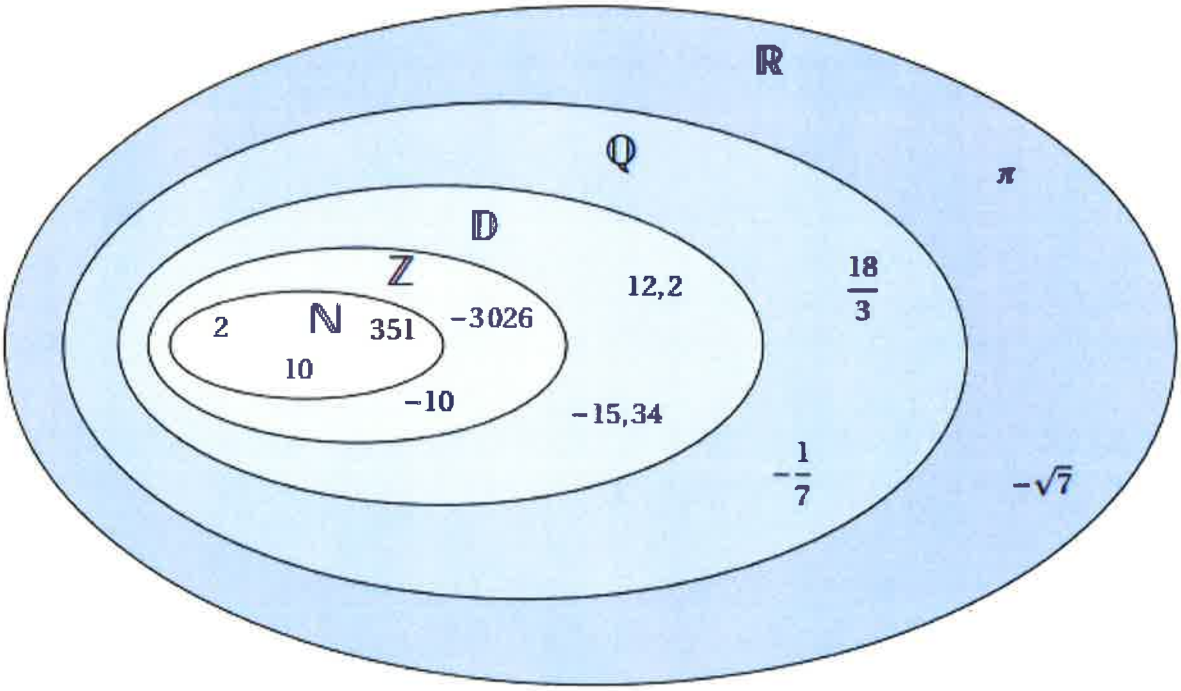
Nombres et Calculs
Leçon 1

- **Les ensembles de nombres**
- **Développement**
- **Puissances et racines carrées**
- **Choisir la bonne expression**

I. Les ensembles de nombres

Tous les nombres appartiennent à l'ensemble $\mathbb{R}$.
Dans cet ensemble, il y en a de plus petits que l'on va visualiser sur ce schéma :



$\mathbb{N}$: Ensemble des entiers naturels : Tous les nombres entiers (pas de virgules) et positifs.
$\mathbb{Z}$: Ensemble des entiers relatifs : Tous les nombres entiers positifs ou négatifs.
$\mathbb{D}$: Ensemble des décimaux : Tous les nombres entiers ou à virgule, positifs ou négatifs, mais uniquement s'ils ont un nombre entier de chiffres derrière la virgule. Ex : $^2/_5 = 0.4$.
$\mathbb{Q}$: Ensemble des rationnels : Tous les nombres entiers ou non, positifs ou négatifs, et qui n'ont pas obligatoirement un nombre fini de chiffres derrière la virgule. Par contre, ils doivent pouvoir s'écrire comme le quotient de deux nombres entiers. Ex : $^1/_3 = 0.33333$ .....
$\mathbb{R}$: Ensemble des réels : Ensemble des nombres entiers ou non, positifs ou négatifs, qui peuvent avoir un nombre fini ou infini de chiffres derrière la virgule et qui peuvent ou non s'écrire comme le quotient de deux nombres entiers. Ex : π. (Pi = 3.141592)

Remarque : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
Parmi les nombres entiers, il existe des nombres appelés nombres premiers. Les nombres premiers sont des nombres qui ne se divisent que par 1 et eux-mêmes.
Ex : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23…
On peut décomposer tous les nombres entiers en produit de nombres premiers.

98	2
49	7
7	7
1	

$$98 = 2 \times 7 \times 7 = 2 \times 7^2$$

Remarque : Pour la décomposition, on commence toujours par le plus petit : 2, si ce n'est pas possible, on essaie 3, puis 5……

II. Développement et factorisation

Soit 3 nombres réels : a, b et c.

Factorisation ←

$a(b + c) = a \times b + a \times c$

→ Développement

1) Développement :

On distribue le terme qui est en facteur.

Ex : $4x(2 + x) = 4x \times 2 + 4x \times x$

Rem : La multiplication (comme la division) est prioritaire sur l'addition (ou la soustraction)

Ex : $(3x - 1)(2x + 4) = 3x \times 2x + 3x \times 4 + (-1) \times 2x + (-1) \times 4$
$= 6x^2 + 12x - 2x - 4 = 6x^2 + 10x - 4$

Identités remarquables : Soient a et b deux nombres réels.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

2) Factorisation

On regarde s'il y a un <u>facteur commun</u> aux différents termes ou si l'expression est une <u>identité remarquable.</u>

Ex :$2x^2 + 16x = 2x \times x + 2x \times 8$ On remarque que $2x$ est un facteur commun.
$= 2x(x + 8)$ On met $2x$ en facteur.

Ex : $x^2 - 9$ Troisième identité remarquable.
$= x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$

Factoriser une expression mathématique, c'est l'écrire sous forme de facteurs.

III. Puissances et racines carrées

1) Puissances

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots. \times a}_{\text{n fois}}$

Ex : $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

$\boxed{\text{Soit } a \in \mathbb{R}, a^{-n} = 1/_{a^n}}$

Ex : $3^{-4} = 1/_{3^4} = 1/_{3 \times 3 \times 3 \times 3} = 1/_{81}$

<u>Théorèmes</u> : Soit a et b appartenant à $\mathbb{R}$.

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$
$$(a^n)^p = a^{n \times p}$$
$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$
$$({}^a/_b)^n = {}^{a^n}/_{b^n}$$

Ex : $3^2 \times 3^4 = 3^6$ Ex : $(3^2)^3 = 3^{2\times 3}$

Ex : $(3 \times 2)^4 = 3^4 \times 2^4$ Ex : $({}^3/_4)^2 = {}^{3^2}/_{4^2}$

2) Les racines carrées

$\sqrt{a}$ est un nombre dont le carré est égal à a.

Ex : $\sqrt{9} = 3 \; car \; 3^2 = 9$

<u>Théorème</u> : Soit a un réel positif.

$$\sqrt{a^2} = a$$
$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ avec } b \neq 0 \text{ car } b \text{ est au dénominateur}$$

Rem : toute expression qui est « à l'intérieur » d'une racine doit être positive.

$\sqrt{4^2} = 4$ $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ $\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}$

IV. <u>Choisir l'expression la plus appropriée</u>

Soit $f(x) = (x-3)^2 - 4$

Donner la forme développée de $f(x)$, et la forme factorisée de $f(x)$.

En utilisant la forme la plus adaptée déterminer :

- L'image de 0 par f ;
- L'image de 3 par f ;
- Les éventuels antécédents de 0 par f ;
- Les éventuels antécédents de 5 par f ;

On développe $f(x)$:

$f(x) = (x-3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 9 - 4 = x^2 - 6x + 5.$

On factorise $f(x)$:

$f(x) = (x-3)^2 - 4 = (x-3)^2 - 2^2 = (x-3-2)(x-3+2) = (x-5)(x-1).$

Image de 0 : on choisit la forme développée :

$f(0) = 0^2 - 6 \times 0 + 5 = 5.$

Image de 3 : on choisit la forme de l'énoncé :

$f(3) = (3-3)^2 - 4 = -4.$

Antécédent(s) de 0 par f
On résout $f(x) = 0$: on choisit la forme factorisée pour se ramener à une équation produit nul
$(x-5)(x-1) = 0$
$x - 5 = 0$ ou $x - 1 = 0$
$x = 5 \; ou \; x = 1$
Les antécédents de 0 par f sont 1 et 5.
Antécédent(s) de 5 par f
On résout $f(x) = 0$: on choisit la forme développée
$x^2 - 6x + 5 = 5$
$x^2 - 6x = 0$, on factorise le membre de gauche pour se ramener à une équation-produit :
$x(x-6) = 0$
$x = 0 \; ou \; x - 6 = 0$
$x = 0 \; ou \; x = 6$
Les antécédents de 5 par f sont 0 et 6.

V. Transformer des écritures fractionnaires

Ecrire $\frac{3x+2}{2} + \frac{4}{x}$ sous la forme d'un seul quotient :

$$\frac{(3x+2)x}{2 \times x} + \frac{4 \times 2}{2 \times x} = \frac{3x^2 + 2x + 8}{2x}$$

Je m'entraine avant le devoir

Exercice 1 : Développer
$(3x+2)(5x-2)$

Exercice 2 : Factoriser
$(4x+1)^2 - (6x+4)^2$
$(2x+1)(5x-1) - (3x+7)(2x+1)$

Exercice 3 : Calculer et simplifier
$$\frac{75 \times 50}{39 \times 120}$$

Exercice 4 : Mettre sous la forme $a\sqrt{b}$
$3\sqrt{75} + 5\sqrt{243} - 4\sqrt{147}$

Exercice 5 :
$A(x) = (x+1)^2 - (2x+3)^2$
a) Développer $A(x)$
b) Factoriser $A(x)$
c) Résoudre $A(x) = -8$ en choisissant la bonne expression
d) Résoudre $A(x) = 0$

Exercice 6 : Mettre sous forme d'un seul quotient

$B = \frac{4}{6x+1} - 2$

Correction des exercices d'entrainement

Exercice 1

$(3x+2)(5x-2)$

$15x^2 + 10x - 6x - 4 = 15x^2 + 4x - 4$

Exercice 2

$(4x+1)^2 - (6x+4)^2$ j'utilise $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$[(4x+1)+(6x+4)][(4x+1)-(6x+4)]$

$(4x+6x+1+4)(4x+1-6x-4)$

$(10x+5)(-2x-3)$

$(2x+1)(5x-1)-(3x+7)(2x+1)$

$(2x+1)[(5x-1)-(3x+7)]$

$(2x+1)(5x-1-3x-7)$

$(2x+1)(2x-8)$ On peut mettre deux en facteurs

$2(2x+1)(x-4)$

Exercice 3

$$\frac{75 \times 50}{39 \times 120} = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2}{3 \times 13 \times 2 \times 5 \times 3 \times 2 \times 2} = \frac{125}{156}$$

Exercice 4

$3\sqrt{75} + 5\sqrt{243} - 4\sqrt{147}$

$3\sqrt{5 \times 5 \times 3} + 5\sqrt{3 \times 9 \times 9} - 4\sqrt{3 \times 7 \times 7}$

$= 3 \times 5\sqrt{3} + 5 \times 9\sqrt{3} - 4 \times 7\sqrt{3}$

$= 15\sqrt{3} + 45\sqrt{3} - 28\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$

Exercice 5

$A(x) = (x+1)^2 - (2x+3)^2$

a) $A(x) = (x^2+2x+1) - (4x^2+12x+9)$
   $= x^2 + 2x + 1 - 4x^2 - 12x - 9$
   $= -3x^2 - 10x - 8$
b) $A(x) = [(x+1)+(2x+3)][(x+1)-(2x+3)]$
   $= (3x+4)(x+1-2x-3)$
   $= (3x+4)(-x-2)$
c) $A(x) = -8$ je choisis $-3x^2 - 10x - 8 = -8$
   $-3x^2 - 10x = 0$
   $x(-3x-10) = 0$
   $x = 0$ ou $-3x - 10 = 0$

$x = 0$ ou $x = -\dfrac{10}{3}$

d) $A(x) = 0$ je choisis la forme factorisée

$(3x + 4)(-x - 2) = 0$

$(3x + 4) = 0$ ou $-x - 2 = 0$

$x = -\dfrac{4}{3}$ ou $x = -2$

Exercice 6

$B = \dfrac{4}{6x+1} - 2$

$\dfrac{4}{6x+1} - \dfrac{2(6x+1)}{6x+1}$

$\dfrac{4 - 2(6x + 1)}{6x + 1}$

$\dfrac{4 - 12x - 2}{6x + 1} = \dfrac{2 - 12x}{6x + 1}$

Devoir 1

I. Développement – Factorisation

1) Développer les expressions suivantes :

$2x(4x+1)$
$(2x+1)(x-4)$
$(2x+3)(-x^2+x-1)$
$(4x+2)^2$
$(6x-4)^2$
$(4x-1)(4x+1)$

2) Soit un triangle ABC rectangle en A.

$AB = X$
$AC = X-2$

a) Calculer la surface du triangle en fonction de *X*.
b) Montrer que si $X = 8$ alors $BC = 10$.

3) Factoriser les expressions suivantes :

$16x + 8x^2$
$4x^2 - 9$
$4x^2 + 8x + 4$
$5(x-2) + 4x(x-2)$

II. Puissances et racines carrées

a) Mettre les expressions suivantes sous forme de facteurs de nombres premiers, puis simplifier :

$\frac{(25\times 24)}{(56\times 12)}$ $\qquad$ $\frac{(120\times 4)}{(9\times 16)}$

b) Calculer :

$\frac{(4\times 5^2)}{(5^4\times 3)}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{2}\times 3\times\sqrt{50}}{5\times\sqrt{9}}$ $\qquad$ $\sqrt{200}$

c) Ecrire sans radical (racine) au dénominateur :

$\frac{4}{(3-\sqrt{2})}$

Aide : multiplier le dénominateur par $3+\sqrt{2}$ et utiliser une identité remarquable.

d) Mettre sou la forme $a\sqrt{b}$, a et b appartenant à $\mathbb{N}$.

$2\sqrt{44} + 3\sqrt{11} + 4\sqrt{99}$

III. Choisir la bonne expression

Soit $F(x) = (2x+1)^2 - (x-5)^2$

1. Développer, réduire et ordonner $F(x)$.
2. En factorisant $(2x+1)^2 - (x-5)^2$, établir que :

$F(x) = (x+6)(3x-4)$

3. Résoudre l'équation $F(x) = 0$.
4. Résoudre l'équation $F(x) = -24$.

IV. Transformer des écritures fractionnaires

- Mettre sous la forme d'un seul quotient

$a)\ \dfrac{1}{x+1} + 3$

$b)\ \dfrac{2}{3x-5} - 7$

$c)\ \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2}$

$d)\ \dfrac{1}{x+5} - \dfrac{1}{x+3}$

$e)\ \dfrac{7}{3x+2} - \dfrac{4}{2x+5}$

$f)\ \dfrac{3x+5}{x+7} + \dfrac{4x-2}{x-3}$