<u>Leçon 1</u>
<u>Nombres entiers</u>

<u>I. Rappels sur les caractères de divisibilité</u>

Un nombre est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4 ,6 ou 8
Exemple : 18 et 20586 sont divisibles par 2.

Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
Exemple : 246 est divisible par 3 car 2 + 4 + 6 = 12 et 12 est divisible par 3.

Un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres d'un nombre entier est un divisible par 4.
Exemple : 728 est divisible par 4, car 28 est divisible par 4.

Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.
Exemple : 7625 est divisible par 5, car son chiffre des unités est 5.

Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
Exemple : 1116 divisible par 9 car 1 + 1 + 1 + 6 = 9

Un nombre est divisible par 10 ou par 100, s'il se termine par un zéro.
Exemple : 1500 divisible par 10 et par 100

Je m'entraîne avant le devoir

<u>Exercice 1</u> Voici 6 nombres : 587 – 806 – 1203 – 6570 – 1254 – 45120
Ecrire ceux qui sont divisibles par 2: …………………………………….

Ecrire ceux qui sont divisibles par 5: ……………………………………..

Ecrire ceux qui sont divisibles par 3 ……………………………………..

<u>Exercice 2</u> Parmi les nombres donnés, trier ceux qui sont divisibles par 9 :

125 – 252 – 133 – 603 – 351 – 114 – 7025 – 8025 – 426 – 207 – 307 – 709 – 819 - 888

<u>II. Les nombres premiers</u>

Un nombre *p* est premier s'il admet deux diviseurs différents et deux seulement : 1 et *p* (lui-même).
Attention : 0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs.
1 n'est pas premier car il admet un seul diviseur 1.
Liste des nombres premiers inférieurs à 30 : 2 – 3 – 5 – 7 – 11 – 13 – 17 – 19 – 23 – 29

<u>Exercice 3</u> Les nombres suivants sont-ils premiers ? 5 – 6 – 7 – 8

<u>III. Décomposition en produits de facteurs premiers</u>

Tout nombre non premier et supérieur à 1 peut s'écrire sous la forme d'un produit de facteurs premiers et la décomposition est unique.
Exemple : Décomposons 360 en produit de facteurs premiers.
La technique est la suivante : on divise quand c'est possible par les nombres premiers successifs (2, 3, 5 puis 7…) en épuisant ainsi tous les diviseurs possibles.
360 : 2 =180
180 : 2 = 90

90 : 2 = 45
45 : 3 = 15
15 : 3 = 5
5 : 5 = 1   donc 360 = $2^3 \times 3^2 \times 5$

« Etre diviseur » et « être multiple »
Deux nombres *a* et *b* supérieurs à 1 étant donnés, il est très facile de voir sur leurs décompositions si l'un d'entre eux est diviseur (ou multiple de l'autre).
La flèche signifie « est diviseur de » $\longrightarrow$
La ligne pleine signifie « est multiple de ».

———	*a*	$\longrightarrow$	*b*
	$2^2 \times 3$	———	$2^2 \times 3^2 \times 5$

La décomposition de *a* est contenue dans celle de *b* : *a* x 3 x 5 = *b*
a est diviseur de *b*, *b* est multiple de *a*.

<u>Exercice 4</u> Décomposer les nombres suivants : 700 – 9000 – 12100

<u>Pour aller plus loin</u>

<u>IV. Diviseurs communs et PGCD</u>

Un diviseur commun à deux entiers naturels *a* et *b* est un entier naturel qui divise *a* et *b*.
Le plus grand entier qui divise *a* et qui divise *b* est appelé le Plus Grand Diviseur Commun. On le note PGCD.
Exemple 1 : Trouver le PGCD de 12 et de 18.
12 = 2^2 x 3   18 = 3^2 x 2
donc le PGCD de 12 et 18 est : 2 x 3 = 6
Exemple 2 : Trouver le PGCD de *a* = 252 ; *b* = 378 et *c* = 630
On décompose d'abord ces nombres en produit de facteurs premiers.
a = 252 = 2^2 x 3^2 x 7
b = 378 = 2 x 3^2 x 7
c = 630 = 2 x 3^2 x 5 x 7   Le PGCD est donc: 2 x 3^2 x 7 = 126

On dit que deux nombres entiers (non nuls) *a* et *b* sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

<u>Pour rendre une fraction irréductible, il faut utiliser la décomposition en facteurs premiers et simplifier.</u>
Exemple : $\frac{759}{552} = \frac{3 \times 11 \times 23}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 23} = \frac{11}{8}$
On a décomposé 759 et 552 en produit de facteurs premiers puis on a pu simplifier par 3 et 23.
La fraction obtenue est irréductible car elle est simplifiée le plus possible.

<u>Trouver le PGCD avec l'algorithme d'Euclide (divisions successives)</u> :
Le procédé est le suivant :
La méthode des divisions successives (algorithme d'Euclide) s'appuie sur le fait qu'un diviseur commun est aussi un diviseur commun au plus petit de ces deux nombres et au reste de la division.
Exemple : Calculer le PGCD de 702 et 273 en utilisant l'algorithme d'Euclide.
On remplace donc la recherche du PGCD de 702 et 273 par la recherche du PGCD de deux nombres plus petits 273 et 156.
On recommence le même procédé de division avec ces deux nombres nouveaux.
On s'arrête quand on obtient un reste nul.

	dividende	diviseur	reste
1	702	273	156
2	273	156	117
3	156	117	39
4	117	39	0

1. 702 = 273 x 2 +156
   PGCD (702 ;273) = PGCD(273 ;156)
2. 273 = 156 x 1 = 117
   PGCD(273 ;156) = PGCD(156 ; 117)
3. 156 = 117 x 1 = 39
   PGCD(156 ;117) = PGCD(117 ;39)
4. 117 = 39 x 3 + 0
   PGCD(117 ; 39) = 39

PGCD (702 ; 273) = 39
Les deux nombres 702 et 273 ne sont pas premiers entre eux car leur PGCD n'est pas égal à 1.

Pour trouver le PGCD de deux nombres *a* et *b* par la méthode des divisions successives, on utilise la méthode ci-dessus. Le PGCD est ainsi égal au dernier reste non nul.
Il faut donc :

1. Diviser *a* par *b*. on obtient le reste *r*.
2. Si *r* = 0, le PGCD est trouvé : PGCD (*a* ; *b*) = *b*
3. Si $r \neq 0$, remplacer *a* par *b*, *b* par *r* et recommencer à partir de 1.

<u>Trouver le PGCD avec la méthode des soustractions successives</u> :
En utilisant la méthode par soustractions successives, cherchons le P.G.C.D de 1224 et 936.

a	b	a – b
1224	936	288
936	288	648
648	288	360
360	288	72
288	72	216
216	72	144
144	72	72
72	72	0

Le P.G.C.D de 1224 et 936 est 72 car c'est le dernier reste non nul.

<u>Exercice 5</u> Calcule le PGCD de 6209 et 4435 par l'algorithme d'Euclide

<u>Exercice 6</u> Calculer le PGCD avec les soustractions successives de 675 et 375.
Puis écrire la fraction $\frac{675}{375}$ sous forme irréductible.

<u>Exercice 7</u> Un pâtissier dispose de 411 cerises et de 685 prunes. Afin de préparer des tartelettes, il désire répartir ces fruits en les utilisant tous et en obtenant le maximum de tartelettes identiques.
1/ Calculer le nombre de tartelettes.
Justifie clairement ta réponse.
2/ Calculer le nombre de cerises et de prunes dans chaque tartelette.

Solution des exercices d'entrainement

<u>Exercice 1</u>
Ecrire ceux qui sont divisibles par 2: 806 –6570 – 1254 – 45120. Ils sont divisibles par 2 car ils se terminent par 0, 2, 4, 6 ou 8.

Ecrire ceux qui sont divisibles par 5: 6570 –45120 Ils sont divisibles par 5 car ils se terminent par 0 ou 5.

Ecrire ceux qui sont divisibles par 3 : 1203 car 1+2+0+3 = 6

6570 car 6+5+7+0 = 18

1254 car 1+2+5+4 = 12

45120 car 4+5+1+2+0 = 12

<u>Exercice 2</u> Parmi les nombres donnés, trier ceux qui sont divisibles par 9 :

125 – 252 – 133 – 603 – 351 – 114 – 7025 – 8025 – 426 – 207 – 307 – 709 – 819 - 888

252 car 2+5+2 = 9
603 car 6+0+3 = 9
351 car 3+5+1 = 9

207 car 2+0+7 = 9
819 car 8+1+9 = 18

<u>Exercice 3</u> Les nombres suivants sont-ils premiers ? 5 – 6 – 7 – 8

- 5 est un nombre premier car il n'est multiple d'aucun nombre entier (à l'exception de 1 car 5 = 5 • 1).
- 6 n'est pas un nombre premier car 6 est multiple de 2 et de 3.
- 7 est un nombre premier car il n'est multiple d'aucun nombre entier (à l'exception de 1 car 7 = 7 • 1).
- 8 n'est pas un nombre premier car 8 est multiple de 2 et de 4.

<u>Exercice 4</u>

700 : 700 = 7 x 100 = 7 x 25 x 4 = 7 x $5^2 \times 2^2$

9000 : 9 x 1000 = 9 x 8 x 125 = $3^2 \times 2^3 \times 5^3$

12100 : 121 x 100 = 121 x 4 x 25 = $11^2 \times 2^2 \times 5^2$

<u>Exercice 5</u> Calculons le PGCD de 6209 et 4435 par l'algorithme d'Euclide

6209 = 4435 x 1 + 1774
4435 = 1774 x 2 + 887
1774 = 887 x 2 + 0

Le PGCD de 6209 et 4435 est le dernier reste non nul soit 887.

<u>Exercice 6</u>

675 = 375 x 1 + 300

375 = 300 x 1 + 75

300 = 75 x 4 +0

Le PGCD de (675 ; 375) est de 75.

Pour mettre la fraction $\frac{675}{375}$ sous forme irréductible, il faut se servir du PGCD :

$$\frac{675}{375} = \frac{675 \div 75}{375 \div 75} = \frac{9}{5}$$

Exercice 7

1) Le pâtissier souhaite utiliser tous les fruits, il faut donc calculer le PGCD de 685 et 411.

Utilisons l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD de (685 ; 411)

685 = 411 x 1 + 274

411 = 274 x 1 +137

274 = 137 x 2 + 0

Le PGCD est donc de 137. Il y aura donc 137 tartelettes.

2) Il y aura :

$\frac{685}{137}$ = 5 prunes et $\frac{411}{137}$ = 3 cerises par tartelette.

TROISIEME

Devoir 1

Exercice 1

Parmi les nombres suivants trouver :

1) Ceux qui sont divisibles par 2.
2) Ceux qui sont divisibles par 3.
3) Ceux qui sont divisibles par 5.
4) Ceux qui sont divisibles par 7.
5) Ceux qui sont divisibles par 9.

1890 – 1418 – 595 – 733 – 18 000 – 208 – 1789 – 2 000 – 366 – 1215

Exercice 2

Les phrases suivantes sont elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

a) 3 est un diviseur de 53
b) 165 est divisible par 11.
c) 28 a pour multiple 280.
d) 5 divise 95.
e) 7 a pour diviseur 28.
f) 126 est un diviseur de 45 628.
g) 6 est un diviseur de 0.
h) 1 est un multiple de 83.
i) 47 812 est un multiple de 117.
j) 1 divise 0.
k) 65 a pour diviseur 5.
l) 0 divise 25.

Exercice 3

1) a) Donner tous les diviseurs de 42.
   b) Donner tous les diviseurs de 65.
   c) Donner les diviseurs de 42 et 65. Quel est leur PGCD ?
2) a) Donner tous les diviseurs de 50, de 60, de 80.
   b) Quels sont les diviseurs communs à 50, 60 et 80 ? Quel est leur PGCD ?

Exercice 4

1) a) Calculer le PGCD de 3 465 et 1 575 par la méthode des soustractions successives.
   b) Simplifier la fraction $\frac{3\,465}{1\,575}$ pour la rendre irréductible.

2) a) Calculer le PGCD de 12 456 et 2 444 en utilisant l'algorithme d'Euclide.
   b) Simplifier la fraction $\frac{2\,444}{12\,456}$ pour la rendre irréductible.

TROISIEME

Devoir 1 (suite)

Exercice 5

Soient les 3 nombres *a*, *b*, *c*.

$a = 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2$ $\quad$ $b = 2^2 \times 3 \times 5^3 \times 7^3$ $\quad$ $c = 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11$

1) 2 est-il un diviseur commun aux nombres *a* et *b* ?
2) 5 est-il un diviseur commun aux nombres *b* et *c* ?
3) 2×3^2 est-il un diviseur commun aux nombres *a* et *b* ?
4) $3 \times 5^2 \times 7 \times 11$ est-il un diviseur commun aux nombres *a*, *b* et *c* ?
5) $2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11$ est-il un diviseur commun aux nombres *a*, *b* et *c* ?

Exercice 6

1) Dire si les nombres donnés sont premiers entre eux dans chacun des cas :
   a) 55 et 18.
   b) 6 et 723
   c) 24 et 32.
2) 1 789 et 1 999 sont-ils deux nombres premiers entre eux ? Expliquer pourquoi.

Exercice 7

1) Parmi les fractions suivantes, quelles sont celles qui sont irréductibles :
   $\frac{26}{68}$; $\frac{36}{75}$; $\frac{5}{11}$; $\frac{52}{10}$; $\frac{36}{4}$; $\frac{49}{92}$; $\frac{37}{74}$; $\frac{37}{113}$.

2) Simplifier si possible les fractions suivantes pour les rendre irréductibles en indiquant la méthode utilisée.

   a) $\frac{51}{34}$ $\quad$ b) $\frac{4\,838}{3\,567}$ $\quad$ c) $\frac{3\,567}{41}$ $\quad$ d) $\frac{3 \times 51}{5 \times 34}$

Exercice 8

On dispose de 90 bonbons aux fruits et de 75 caramels.

1) Quel est le plus grand nombre de sachets identiques que l'on peut composer en utilisant tous les bonbons ?
2) Combien chaque sachet contiendra-t-il de bonbons aux fruits et de caramels ?

Exercice 9

1) Calculer le PGCD de 78 et 130, en précisant la méthode employée et vos calculs.
2) Luis est un pâtissier confiseur, il veut vendre tous ses chocolats et tous ses biscuits dans des boîtes identiques. Chaque jour il peut fabriquer 78 chocolats et 130 biscuits. Avec sa production du jour, il veut remplir des boîtes contenant chacune, le même nombre de chocolats et le même nombre de biscuits.
a) Justifier que 26 est le maximum de boîtes qu'il peut obtenir.
b) Quel est alors le nombre de chocolats et le nombre de biscuits dans chaque boîte ?