Manuel à acquérir pour approfondir les leçons

Hyperbole

Edition Nathan

Classe de 1ère

ISBN : 978 2 09 172908 4

Leçon 1 : Les Suites numériques et sens de variation

I. Généralités :

1.1 Définition

Soit *p* un nombre entier.

☞ Soit *n* un entier tel que $n \geq p$. Une **suite à partir de *p*** est la fonction qui à chaque *n* associe le réel *u(n)*. Le réel *u(n)* est noté aussi u_n. Ainsi définie, une suite est notée (u_n).

Notons que si *a* est un réel y f est une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$, on peut définir une suite u_n comme $u_n = f(n)$ pour tout entier $n \geq a$.

1.2 Définition

Considérons une fonction *f* définie sur un ensemble *I*. Supposons que pour tout $x \in I, f(x) \in I$. Soient $a \in I$ et *p* un entier. On peut définir par récurrence une suite comme suit :

$$\begin{cases} u_p = a \\ pour\ tout\ entier\ n \geq p;\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On rappelle la notion d'égalité entre deux suites définies à partir d'un certain p: $(u_n) = (v_n)$ si et seulement si $u_n = v_n$ pour tout $n \geq p$.

1.3 Définition

☞ (u_n) est croissante à partir de *p* si pour tout $n \geq p, u_{n+1} \geq u_n$.

☞ (u_n) est décroissante à partir de *p* si pour tout $n \geq p, u_{n+1} \leq u_n$.

Comme toujours, on dit qu'une suite est monotone si elle est croissante ou décroissante. Egalement, une suite est dite stationnaire à partir du rang *p* si $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \geq p$.

Exercice corrigé

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$$

Solution :

On rappelle qu'étudier le sens de variation d'une suite consiste à déterminer si elle est croissance ou décroissante.

- On calcule les premiers termes de la suite pour conjecturer le sens de variation : $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{3}{4}$, $u_3 = \frac{9}{8}$. Ainsi :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1+1}} - \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{3^n}{2^{n+1}}\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{3^n}{2^{n+2}}$$

Donc on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$, ce qui implique que la suite (u_n) est croissante à partir de 0.

1.4 Propriété

Soit $I = [a; +\infty[$ et soit f une fonction définie sur *I*. Pour $p \geq a$, on considère la suite définie par $u_n = f(n)$ pour tout $n \geq p$.

☞ *f* croissante sur $[p; +\infty[$ implique que (u_n) est croissante à partir de *p*.

☞ *f* décroissante sur $[p; +\infty[$ implique que (u_n) est décroissante à partir de *p*.

Comme toujours, on dit qu'une suite (u_n) converge vers un nombre réel *a* si $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$, (u_n) diverge vers $+\infty$ ou diverge vers $-\infty$ si $\lim_{n \to +\infty} = +\infty$ ou $\lim_{n \to +\infty} = -\infty$.

II. Suite arithmétiques et géométriques :

2.1 Définition

Une suite est dite arithmétique s'il existe un nombre réel *r* tel que pour tout entier $n, u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre *r* est appelé **raison** de la suite.

2.2 Théorème

Soit (u_n) une suite **arithmétique** de raison *r*. Alors pour tout entier *n* , $p \in \mathbb{N}^2$,
on a $u_n = u_p + (n - p) \times r$. En particulier, $u_n = u_0 + n \times r$ pour tout entier *n*.

2.3 Théorème

Soit (u_n) une suite de raison *r*. Alors pour tout entier *p* et *n*, on a on a $u_p = u_n + (p - n) \times r$. En particulier, $u_n = u_0 + n \times r$ pour tout entier *n*.

2.4 Théorème

Soit (u_n) une suite de raison *r*. Les affirmations suivantes sont vraies :

☞ Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.

☞ Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

☞ Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.

2.5 Définition

Une suite est dite **géométrique** s'il existe un nombre réel *q* tel que pour tout entier $n, u_{n+1} = u_n \times q$. Le nombre *q* est appelé **raison** de la suite.

2.6 Théorème

Soit (u_n) une suite géométrique de raison *q*. Alors pour tout entier *n* et $p \in \mathbb{N}^2$,
on a $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$. En particulier, $u_n = u_0 + n \times q^n$ pour tout entier *n*.

2.7 Théorème

Soit *q* un nombre réel non nul. Les affirmations suivantes sont vraies :

☞ Si $q > 1$, alors la suite (q^n) est strictement croissante.

☞ Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante égale à 1.

☞ Si $0 < q < 1$, alors la suite (q^n) est strictement décroissante.

☞ Si $q = 0$, alors la suite (q^n) est constante égale à 0, à partir de 1.

☞ Si $q < 0$, alors la suite (q^n) n'est pas monotone.

2.8 Théorème

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison *r* non nulle. Alors :
☞ $r > 0$ implique que (u_n) dirige vers $+\infty$.
☞ $r < 0$, implique que (u_n) dirige vers $-\infty$.

2.9 Théorème

Soit *q* un nombre réel distinct de 1. Alors :
☞ $q > 1$ implique que la suite q^n dirige vers $+\infty$.
☞ $-1 < q < 1$ implique que la suite q^n converge vers 0.
☞ $q \leq -1$ implique que la suite q^n diverge et n'admet pas de limite.

<u>Devoir 1</u>

<u>Exercice 1</u>

On considère une suite géométrique décroissante dont on connait deux termes :

$$\begin{cases} u_0 u_3 = 32 \\ u_0 + u_3 = 18 \end{cases}$$

1. Calculer ces deux réels.
2. Quelle est la raison de la suite ?
3. On pose $z_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Calculer z_n en fonction de *n*.

<u>Exercice 2</u>

Etudier la monotonie des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

1. $u_n = n - n^3$.
2. $u_n = \frac{2_{n+1}}{n+2}$.

<u>Exercice 3</u>

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} \text{Pour tout entier } n, \quad u_{n+1} = \dfrac{2 + 3u_n}{7 - 2u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

On admet qu'on définit ainsi une suite sur $\mathbb{N}$, avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1[$.

On pose, pour tout $\in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{5u_n}{1-u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
2. Montrer que v_n est une suite arithmétique dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{v_n}{v_n+5}$.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.